STREDNÁ ODBORNÁ ŠKOLA drevárska KRÁSNO nad KYSUCOU

PRÍKLADY Z MATEMATIKY

Obsah

1. Logika, dôvodenie a dôkazy

1.1 Výrok, negácia výroku

Príklad 1.

Ktoré z nasledovných viet sú výroky?

a) $-2 \cdot 3 + 12 > 24$
b) Streda je prvý deň v týždni.
c) Počkaj na mňa!
d) Obsah kruhu s polomerom r je 2πr.
e) Je možné vypočítať obsah obdĺžnika so stranami a, b pomocou vzťahu $S = a \cdot b$?
f) Dobré ráno.
g) Obsah obdĺžnika so stranami a, b určíme pomocou vzťahu $S = a \cdot b$.

Riešenie:

a) Je výrok.
b) Je výrok.
c) Nie je výrok, lebo to nie je oznamovacia veta.
d) Je výrok.
e) Nie je výrok, lebo to nie je oznamovacia veta.
f) Nie je výrok.
g) Je výrok

1.2 Zložený výrok, logické spojky

Príklad 1.

Aký typ zloženého výroku predstavujú nasledovné zápisy:

a) $2 < 5 < 6$
b) $-1 \geq -4$
c) Číslo je deliteľné tromi práve vtedy, ak jeho ciferný súčet je deliteľný tromi.
d) Ak má číslo na mieste jednotiek 0, tak je deliteľné číslom 10.

1.3 Negácia zložených výrokov

Príklad 1.

Negujte nasledujúce výroky

A: Príde Peter a Mária.

B: Prší a je mokro.

C: Svieti slnko alebo fúka vietor.

D: Ak sa nahneváme, budeme zlí.

E: Ak príde Jozef, potom príde aj Eva.

F: Mám dobrú náladu práve vtedy, keď prší.

Riešenie:

A' : Nepríde Peter alebo Mária

B': Neprší alebo nie je mokro

C': Nesvieti slnko a nefúka vietor

D': Nahneváme sa a nebudeme zlí

E': Jozef príde a Eva nepríde

F': Mám dobrú náladu a neprší alebo nemám dobrú náladu a prší

1.4 Pravdivostná hodnota zložených výrokov

Príklad 1.

A: Som nižší ako 3 metre.(1) B: Mám 150 rokov (0)

A $\Rightarrow$ B: Ak som nižší ako 3 m, tak mám 150 rokov. - je nepravdivý výrok,

ale B $\Rightarrow$ A: Ak mám 150 rokov, tak som nižší ako 3 m. - je pravdivý výrok.

Pravdivostná hodnota ekvivalencie dvoch výrokov - je pravdivá práve vtedy, ak oba výroky, majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.5 Kvantifikovaný výrok

Príklad 1.

Podčiarknite v nasledujúcich výrokoch všeobecné a existenčné kvantifikátory.

a) Existuje 6-uholník, ktorý má aspoň tri tupé vnútorné uhly.
b) Možno nájsť prirodzené číslo, ktoré je deliteľom každého prvočísla.
c) Ani jeden koreň rovnice x + 1 = 0 nie je kladné číslo.

Riešenie:

a) Existuje 6-uholník, ktorý má aspoň tri tupé vnútorné uhly.
b) Možno nájsť prirodzené číslo, ktoré je deliteľom každého prvočísla.
c) Ani jeden koreň rovnice x + 1 = 0 nie je kladné číslo.

1.6 Negácia kvantifikovaných výrokov

Príklad 1.

Negujte výroky:

a) A: Všetky násobky čísla 8 sú párne čísla.
b) B: Ktorýkoľvek trojuholník má súčet dĺžok ťažníc väčší ako súčet dĺžok strán.
c) C: Niektorý z koreňov tejto rovnice je záporný.

Riešenie:

a) A': Niektoré násobky čísla. 8 nie sú párne čísla.
b) B': Existuje trojuholník, ktorý nemá súčet dĺžok ťažníc väčší ako súčet dĺžok strán.
c) C': Všetky korene tejto rovnice sú nezáporné.

2. Čísla, premenná a počtové výkony s číslami

2.1 Prirodzené a celé čísla

Príklad 1.

Napíšte prvočíselný rozklad čísla 672

Príklad 2.

Určite, ktorých deliteľov od jedna do desať majú čísla

a) 2840 [2, 4, 5, 8, 10]

b) 675 [3, 5, 9]

c) 12852 [2, 3, 4, 6, 9]

Príklad 3.

Vydeľte:

a) 558 : 24 =
b) 1563 : 14 =
c) 236 : 13 =

Vynásobte:

d) 24 . 17 =
e) 329 . 12 =
f) 1462 . 23 =

2.2 Racionálne čísla , zápisy racionálneho čísla

Príklad 1.

Zapíšte racionálne čísla v základnom tvare:

a) $\frac{33}{77} = \frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{3}{7}$

b) $\frac{111}{144} = \frac{3 \cdot 37}{3 \cdot 48} = \frac{37}{48}$

c) $\frac{476}{408} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 17}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{7}{6}$

Príklad 2.

Zapíšte číslo $0{,}2\overline{3}$ v tvare základného zlomku.

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
&a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}233333.....\\
&10a = 2{,}3333333333\\
&100a = 23{,}33333333\\
&100a - 10a = 21\\
&90a = 21\\
&a = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}\\
&0{,}2\overline{3} = \frac{7}{30}
\end{aligned}
$$

Príklad 3.

Rozhodnite, koľko rôznych racionálnych čísel je v zadaní.

$$\frac{16}{10};\frac{5}{4};1{,}25;\frac{20}{16};1{,}6;\frac{8}{5};\frac{40}{25};\frac{15}{12}$$

2.3 Počtové operácie so zlomkami

Príklad 1.

Sčítajte zlomky:

a) $\frac{7}{12}+\frac{5}{16}$ b) $\frac{19}{24}+\frac{17}{20}$

Príklad 2.

Odčítaj zlomky:

a) $\frac{7}{4}-\frac{5}{6}$ b) $\frac{11}{9}-\frac{9}{11}$

Príklad 3.

Vynásob zlomky:

a) $\frac{20}{9}\cdot\frac{3}{16}$ b) $\frac{144}{13}\cdot\frac{39}{8}$

Príklad 4.

Vydeľte:

a) $\frac{8}{9}\div\frac{8}{27}$ b) $\frac{49}{64}\div\frac{21}{20}$

Príklad 5.

Vypočítajte:

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)$ b) $\frac{3}{5}\div\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{5}\right)$

c) $-\frac{3}{7}+\left(\frac{1}{7}\div\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{3}{2}$

2.4 Zložené zlomky

Príklad 1.

Zapíšte desatinným číslom:

a) $\dfrac{\frac{3}{7}-\frac{2}{11}}{\frac{7}{5}-\frac{2}{7}}$ b) $\dfrac{\frac{6}{5}-0{,}3}{\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{6}}$

c) $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)}{\frac{5}{3}+\frac{1}{4}}$ c) $\dfrac{\frac{3{,}8}{5}}{\frac{0{,}2}{3}}\div\dfrac{2{,}2}{\frac{1}{2}}$

2.5 Percentá

Príklad 1.

Hmotnosť cisterny s vodou je 7610 kg. Hmotnosť cisterny je 23% z celkovej hmotnosti. Aká je hmotnosť vody?

Základom je cisterna (c) a voda (v) dokopy spolu. Máme dve časti základu: cisternu (c) a vodu (v).

Pre cisternu platí, že jej hmotnosť je 23% z celkovej hmotnosti (zo základu), to znamená, že č(c) = $7610 \cdot 0{,}23$ = 1750,3 kg

Teraz chceme vypočítať, koľko váži voda. Môžeme to spraviť dvoma spôsobmi:

- Odpočítame od celkovej hmotnosti: m(v) = m (spolu) – m(c) = 7610 - 1750,3 = 5859,7 kg
- Ak cisterna váži 23% zo základu, tak voda váži 77% zo základu (100% - 23%), t.j.:

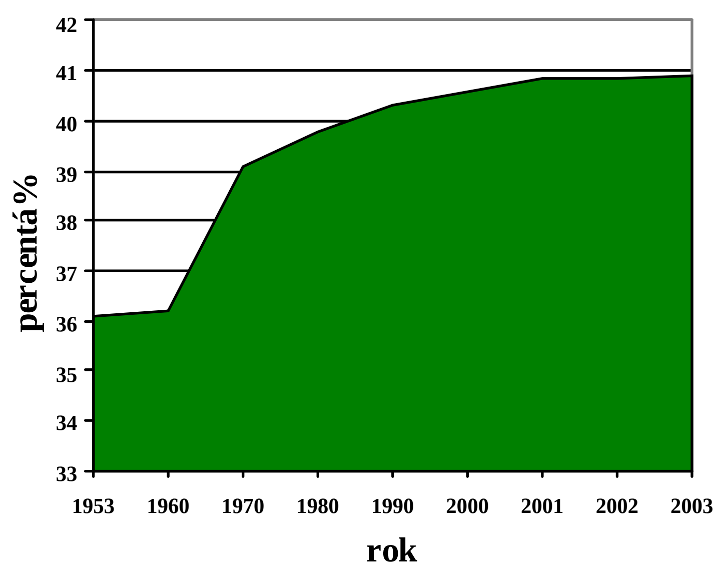
č(v) = 0,77 . 7610 = 5859,7 kg

2.6 Práca s údajmi vyjadrenými v percentách

Príklad 1.

Rozloha lesov v Slovenskej republike sa od roku 1953 výrazne zmenila tak, ako uvádzajú tabuľka a graf podľa jednotlivých rokov.

Rok	1953	1960	1970	1980	1990	2000	2001	2002	2003
Celková rozloha lesov v %	36,10	36,20	39,10	39,80	40,30	40,60	40,83	40,84	40,90



O koľko percent sa zvýšila rozloha lesov na Slovensku od roku 1960 do 2003?

2.7 Riešenie slovných úloh

1. Tovar bol predaný za 336,16 €, t.j. so stratou 10%. Aká bola nákupná cena tovaru a aká bola strata?
(373,4 €, strata:37,34 €)

2. Pozemok areálu školy má tvar obdĺžnika a s rozmermi 100m a 80m. Na pozemku sa nachádza budova školy s obdĺžnikovým pôdorysom 40m x 15m, štvorcový bazén so stranou dĺžky 20m, dva kruhové kvetinové záhony s priemerom 6m, kvetinový záhon v tvare rovnoramenného pravouhlého trojuholníka so stranou dĺžky 4m a 52% plochy pozemku zaberajú ihriská. Ostatné časti pozemku treba vysadiť zeleňou. Na koľkých m^2 bude zeleň?
(2775,48m2)

3. Súprava: náramok s náušnicami stojí 254,93 Sk. Koľko stoja samotné náušnice, ak sú o 40% lacnejšie ako náramok?
(95,6 €)

4. Uzavretá lepenková škatuľa má tvar trojbokého kolmého hranola s podstavou rovnostranného trojuholníka. Hrana podstavy je 24cm dlhá, výška škatule je 0,5m. Vypočítaj, koľko m^2 lepenky treba na zhotovenie 20škatúľ, ak sa musí rátať 5% na zahnutie.
($8,6 m^2$)

2.8 Priama, nepriama úmera

Príklad 1.

Z 10 kg čerstvých jabĺk dostaneme 1250 g sušených jabĺk. Koľko kg čerstvých potrebujeme na 10 kg sušených?

$$10 \cdot 10 = 1,25 \cdot x$$

$$100 = 1,25\,x \qquad / : 1,25$$

$$80 = x$$

Na 10 kg sušených jabĺk potrebujeme 80 kg čerstvých.

2.9 Riešenie slovných úloh

1. Žiaci idú na výlet a musia zaplatiť istú sumu peňazí za autobus. Ak pôjde na výlet všetkých 45 žiakov, každý zaplatí 3,3€. Koľko eur zaplatí každý žiak, ak pôjde na výlet iba 30 žiakov?

2. 50 špendlíkov s rovnakou hmotnosťou má 4,6 gramu. Koľko váži 15 špendlíkov?

3. štyri čerpadlá s rovnakým výkonom naplnia nádrž za 40 hodín. Koľko čerpadiel by sme museli použiť, keby sme chceli ušetriť 8 hodín z času?

4. 100 robotníkov vyrobí za 8 hodín 10 500 výrobkov. Urč, za aký čas vyrobí ten istý počet robotníkov 2 625 výrobkov.

2.10 Absolútna hodnota reálneho čísla

Príklad 1.

Znázornite na číselnej osi množiny:

a) $M = \{x \in R : |x| > 2\}$

b) $N = \{x \in R : |x| \leq 2\}$

c) $O = \{x \in R : 1 < |x| \leq 3\}$

Riešenie:

a) Prvky množiny M sú práve tie reálne čísla, ktorých vzdialenosť od začiatku na číselnej osi je väčšia ako 2. Sú to teda všetky reálne čísla, ktoré sú na číselnej osi napravo od čísla 2 ale aj naľavo od čísla 2

2.11 Intervaly , rozdelenie

Príklad 2.

Dané sú množiny

A = {x R; -8 < x < 4},

B = {x R; -6 < x < 7},

C = {x R; 4 < x},

D = {x R; x < 1},

E = {x R; |x| < 7},

Znázornite tieto množiny ako intervaly.

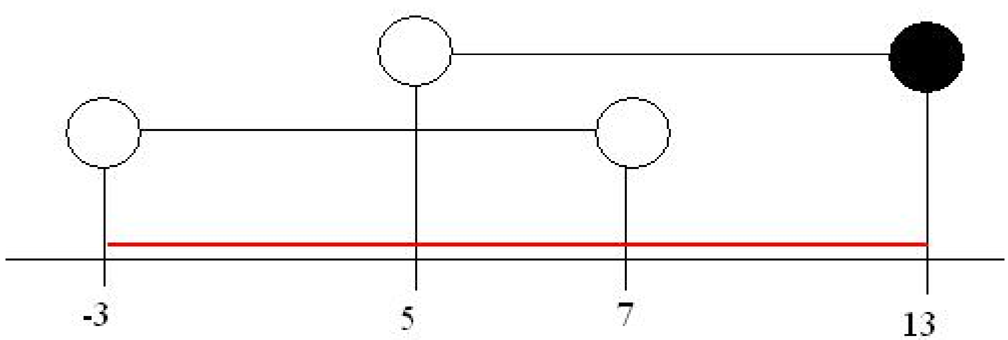
2.12 Prienik a zjednotenie intervalov

Príklad 1.

Graficky znázornite a zapíšte výsledok zjednotenia intervalov $(-3;7)$, $(5;13\rangle$.

Riešenie:

Na jednu číselnú os zakreslíme oba intervaly $(-3;7)$ a $(5;13\rangle$.



Prvok patrí do zjednotenia intervalov, ak patrí aspoň do jedného z intervalov. Časť patriacu aspoň jednému intervalu vyznačíme červenou farbou.

Zapíšeme výsledok: $(-3;7)$ $(5;\ 13\rangle = (-3;\ 13\rangle$.

2.13 Riešenie úloh

Príklad 1.
Určite zjednotenie a prienik intervalov

a) $(-\infty,3\rangle,\langle 2,\infty)$ c) $(1,\infty),(2,\infty)$

a) $\langle 2,3\rangle, (1,\infty)$

d) $(-3,2), (2,4)$

b) $(-\infty,0\rangle, \langle 0,1\rangle$

e) $(0,1), \langle 0,1\rangle$

Príklad 2.

Určite, ktoré z uvedených množín sú a ktoré nie sú intervaly:

$\{1,2,3\}$, $\{x \in Z; x > 0\}$, $\{x \in R; x > 0\}$, N, $\{x \in Q; x > 0\}$, Z, $\{0\}$, $\{x \in R; -1 \le x < 3\}$,
¤, $\{x \in R; 1 < |x| < 2\}$, $(1,2) \cup (3,4) \cup (3,4) \cup (3,4)$

Príklad 3.

Zobrazte na číselnej osi danú množinu a ak je to možné, zapíšte ju ako interval:

a) $\{x \in R; |x-3| \le 1\}$

b) $\{x \in R; |x-1| < 2\}$

c) $\{x \in R; |x-1| < 3\}$

2.14 Mocniny s prirodzeným exponentom

Príklad 1.

Vypočítajte:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 . \left(\frac{3}{2}\right)^4 =$

b) 2 $x^2 y^3 z.3xy^2 z^3 =$

c) $(-2)^5 x^5 y^2 : (-2)^2 x^3 y^4 =$

d) $(3x^4 yz^3)^3 =$

Príklad 2.

Upravte na jednu mocninu

a) x3.x9 =

b) x3.(-x)9 =

c) y5.y6 .y-2 =

d) (-x)2.x7 =

e) $3^a \cdot 3^b =$

f) $23.24 =$

g) $\dfrac{4^x.4^5}{4^{x+3}} =$

2.15 Mocniny s celočíselným exponentom

Príklad 1

Vypočítajte:

$(-2)^{-1} =$ $\qquad$ $(0{,}125)^{-1} =$

$3^{-4} =$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2} =$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} =$ $\qquad$ $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{-3} =$

Príklad 2.

a, b, c sú nenulové reálne čísla. Odôvodnite jednotlivé kroky vo výpočtoch.

a) $\left(6a^3b^{-2}c^{-1}\right)\cdot\left(3a^{-5}b^3c\right)=18a^{-2}bc^0=\dfrac{18b}{a^2}$

b) $\left(2a^{-3}b^2c\right)^{-3}=2^{-3}a^9b^{-6}c^{-3}=\dfrac{a^9}{8b^6c^2}$

c) $\left(6a^3b^{-2}c^{-1}\right)\div\left(3a^{-5}b^3c\right)=2a^8b^{-5}c^{-2}=\dfrac{2a^8}{b^5c^2}$

d) $\left(\dfrac{a^2+b^{-2}}{c^2}\right)^{-1}=\dfrac{c^2}{a^2+b^{-2}}=\dfrac{c^2}{a^2+\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{b^2c^2}{a^2b^2+1}$

e) $\left[\left(\dfrac{a^{-1}b^2}{c}\right)^2\right]^{-3}=\left(\dfrac{a^{-1}b^2}{c}\right)^{-6}=\dfrac{a^6b^{-12}}{c^{-6}}=\dfrac{a^6c^6}{b^{12}}$

2.16 Mocniny s racionálnym exponentom

Príklad 1.

Aplikujte vety platiace pre počítanie s mocninami:

a) $a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{3}}, a > 0$

b) $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$

c) $x^{\frac{-1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

d) $\left(10^3 \cdot 10^{-5}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

f) $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}}{\left(x^3 \cdot y^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}}, \quad x, y > 0$

Riešenie:

a) $a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{2+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{30+9+5}{15}} = a^{\frac{44}{15}}$

b) $2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^3 = 3^3 = 27$

c) $x^{\frac{-1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{-1}{3}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{-3+3}{3}} = x^{\frac{0}{3}} = x^0 = 1$

d) $\left(10^3 \cdot 10^{-5}\right)^{-2} = 10^{3\cdot(-2)} \cdot 10^{-5\cdot(-2)} = 10^{-6} \cdot 10^{10} = 10^{-6+10} = 10^6$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

2.17 Prepis mocniny na odmocninu a opačne

Príklad 1.

Napíšte mocninu $3^{\frac{5}{7}}$ ako odmocninu
Riešenie:

$$3^{\frac{5}{7}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$m = 5,\ n = 7 \quad \rightarrow \quad 3^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{3^5}$$

Príklad 2.
Zapíšte v tvare $\sqrt[n]{a^m}$

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $a^{\frac{5}{4}}$ c) $x^{\frac{1}{7}}$

d) $11^{\frac{-3}{5}}$ e) $a \cdot a^{\frac{4}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{4}{5}}$

2.18 Úpravy výrazov s odmocninami

Príklad 1.

Vyjadrite ako mocniny s racionálnym exponentom, vypočítajte a výsledok zapíšte v tvare odmocniny.

a) $\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}, \qquad x > 0$

b) $\dfrac{\sqrt[6]{y^4} \cdot \sqrt[3]{y^{-2}}}{\sqrt[5]{y^3}}, \qquad y > 0$

c) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad x > 0$

Riešenie:

a)
$$\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x \cdot (x)^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{3+1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{2+1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{6}} \cdot x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$$

b) $\frac{\sqrt[6]{y^4}\cdot\sqrt[3]{y^{-2}}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{y^{\frac{4}{6}}\cdot y^{\frac{-2}{3}}}{y^{\frac{3}{5}}} = \frac{y^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{-2}{3}}}{y^{\frac{3}{5}}} = \frac{y^0}{y^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{y^{\frac{3}{5}}} = y^{\frac{-3}{5}} = \sqrt[5]{y^{-3}}$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{x}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{-1}{8}} = \frac{x^{\frac{-1}{8}}}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{-1}{24}}} = \frac{x^{\frac{-1}{8}}}{x^{\frac{-3}{48}}} = x^{\frac{-1}{8}-\left(-\frac{1}{16}\right)} = x^{\frac{-2+1}{16}} =$$

$$= x^{\frac{-1}{16}} = \sqrt[16]{x^{-1}} = \sqrt[16]{\frac{1}{x}}$$

2.19 Úrok, jednoduché úrokovanie na dni, mesiace

Príklad 1.

Aký veľký úrok pripíše banka ku vkladu 800 € za rok, pri ročnej úrokovej miere 2% ?

V tomto prípade môžeme počítať:

a) cez jedno percento

100% = 800 €

1% = 800 : 100 = 8

2% = 2 . 8 = 16

b) trojčlenkou

100 %..............................800 €

2%..................................x €

priama úmera 2:100 = x : 800

2 . 800 = 100 . x

1600 = 100 . x

1600 : 100 = x

16 = x

c) dosadením do vzorca

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot t = \frac{800 \cdot 2}{100} \cdot 1 = \frac{1600}{100} 1 = 16$$

Vo všetkých troch prípadoch vyšiel výsledok rovnaký.

Banka pripíše ku vkladu 800 € za rok 16 €.

1. **Úrokovacia doba mesiac, mesiace**

$t = \frac{m}{12}$, kde m je počet mesiacov

Úrok za m mesiacov vypočítame $u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12}$

Príklad 2.

Koľko € zaplatí podnikateľ banke, ak si zoberie úver 24 000 €, pri ročnej úrokovej miere 8% a splatí ho za 10 mesiacov?

K = 24 000 €

p = 8%

m = 10

najskôr vypočítame úrok podľa vzorca

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12} = \frac{24000 \cdot 8}{100} \cdot \frac{10}{12} = 1920 \cdot \frac{10}{12} = 1600$$

úrok za 10 mesiacov bude 1600 €

podnikateľ musí banke vrátiť sumu, ktorú si požičal + úrok

24000 + 1600 = 25600

2. **Úrokovacia doba na dni**

$t = \frac{d}{360}$, kde t je počet dní

V bankovníctve sa najčastejšie používa na finančnú matematiku metóda, pri ktorej platí, že každý mesiac má 30 dní a rok 360 dní.

Úrok za určitý počet dní vypočítame

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{d}{360}$$

Príklad 3.

Otec vložil 21. mája do banky 1200 € pri ročnej úrokovej miere 4%. Koľko € mu pripíšu na konci roka?

K = 1200 €

p = 4%

d = 7 . 30 (7 celých mesiacov) + 11 (počet dní v máji) = 221 dní

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{d}{360} = \frac{1200 \cdot 4}{100} \cdot \frac{221}{360} = 29{,}5$$

Otcovi pripíšu na konci roka úrok 29.5 €

na konci kalendárneho roka mení.

Príklad 4.

Akú sumu budeme mať na účte na konci roka 2010, ak 1. júla 2009 naň vložíme 1000 €? Ročná úroková miera je 6%.

Riešenie:

najskôr musíme vypočítať, akú sumu pripíšu ku vkladu na konci roka 2009

K = 1000 €

p = 6%

m = 6

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12} = \frac{1000 \cdot 6}{100} \cdot \frac{6}{12} = 30$$

Na konci roka 2009 nám pripíšu sumu 30 €.

teraz môžeme počítať, akú sumu pripíšu na konci roka 2010

K = 1000 € + 30 € (tie sme získali v roku 2009) = 1030 €

p = 6%

t = 1

$$u = \frac{K \cdot p}{100} \cdot t = \frac{1030 \cdot 6}{100} \cdot 1 = 61{,}8$$

Na konci roka nám k sume 1030€ pripíšu úrok 61,8 €. Spolu budeme mať na účte 1091,8 €.

2.20 Riešenie slovných úloh

1. Martin vložil do banky sumu 3 500 € . Keď si po 4 mesiacoch chcel vybrať celú sumu z banky zistil, že na účte má 3 532 €. Aká bola ročná úroková miera ? (2,74%)

2. Rodina pána Ficeka si 8. mája vzala v banke úver vo výške 5 500 € . Úver Ficekovci splatili už 5. novembra toho istého roku. Aký veľký úrok zaplatili za úver, ak ročná úroková miera bola 6 % ? (165€)

3. Pán Malý si vzal úver 5 000 € s ročnou úrokovou mierou 9 %. Pán Kováč si zobral úver 9 000 € s ročnou úrokovou mierou 5 %. Ak obidvaja splatia svoj úver za 12 mesiacov, ktorý z nich zaplatí vyššie úroky? (rovnaké úroky)

4. Akú veľkú sumu vložila pani Veslá na účet do banky pri ročnej úrokovej miere 7%, ak za 8 mesiacov jej pripísali na účet 120 € ? (2571,42€)

5. Pán Novák z vkladu 650 € získal po roku úrok 22,75 €. Akou úrokovou mierou bol jeho vklad úročený ? (3,5%)

6. Koľko eur musí zaplatiť začínajúci podnikateľ za úver 25 000 € na úrokoch pri ročnej úrokovej miere 15%, ak si úver zobral 12.5. a chce ho splatiť 18.12. toho istého roku ? (2250€)

7. Koľko € si v banke musíme uložiť, ak chceme, aby nám po troch mesiacoch pripísali na účet 200 € pri ročnej úrokovej miere 3,2% ? (25000€)

8. Koľko € si v banke musíme uložiť, ak chceme, aby nám po štyroch mesiacoch pripísali na účet 100 € pri ročnej úrokovej miere 2,5% ? (12000€)

9. Pani Veselá z vkladu 750 € získala po roku úrok 20,25 €. Akou úrokovou mierou bol jej vklad úročený ? (2,7%)

10. Koľko eur musí zaplatiť firma za úver 45000 € na úrokoch pri ročnej úrokovej miere 12%, ak jej banka poskytla úver 13. marca a firma ho chce splatiť 22. novembra toho istého roku? (3375€)

2.21 Zložené úrokovanie

Príklad 1.

Vypočítajme budúcu hodnotu kapitálu po 10 rokoch (n = 10), ak súčasná hodnota K_0 = 10 000 € pri 8 % ročnej úrokovej miere

Riešenie:

Je dané: K_0 = 10 000 €; i = 0,08; n = 10

Dosadením do vzorca $K_n = K_0\,(1 + i)^n$ dostávame:

Kn = 10 000 (1 + 0,08)^{10} = 21 589,25 €

Budúca hodnota kapitálu po 10 rokoch bude 21 589,25 €.

Príklad 2.

Koľko bude mať na účte pán Novák v čase svojho odchodu do dôchodku o 30 rokov, ak dnes vloží do banky 450 € a banka úročí vklad 4%.

Riešenie:

Je dané K_0 = 450 €; p = 4; n = 30

Dosadením do vzorca $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ dostávame:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n = 450 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^{30} = 1459{,}53\,€.$$

Pán Novák bude mať v čase odchodu do dôchodku 1 459,53 €.

2.22 Umorovanie

Príklad 1.

Pri inventúre strojového zariadenia sa odpisovalo 10 % z účtovnej ceny stroja v danom kalendárnom roku. Akú pôvodnú cenu mal stroj, ktorý po ôsmich rokoch používania má účtovnú cenu 717 €.

Riešenie:

K_0 – začiatočná istina

p – odpis, úrok

K_n – zostatok, účtovná cena

N – obdobie odpisovania

$$K_n = K_0 \cdot \left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1-\frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow 717 = K_0 \cdot \left(1-\frac{10}{100}\right)^8 \Rightarrow 717 = K_0 \cdot 0{,}9^8$$

$$717 = K_0 \cdot 0{,}4305 \qquad /:0{,}4305$$

$$\frac{717}{0{,}4305} = K_0$$

$$1665{,}51 = K_0$$

Obstarávacia cena stroja bola 1665,51€.

2.23 Riešenie slovných úloh

Príklad 1

Koľko vložil na vkladnú knižku môj predok, ak bolo na nej v roku 2002 - 367 220 $, banka úročila vklad polročne pri ročnej úrokovej miere 4,3% a vkladná knižka bola založená v roku 1926?

Riešenie:

Je dané: *Kn*= 367 220 p. j.; *i* = 0,043; *n* = 2002 - 1926 = 76

Dosadením do vzorca $K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m.n}}$ dostávame

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m.n}} = \frac{367220}{\left(1+\frac{0,043}{2}\right)^{2.76}} = 14480$$

$$K_0 = 14\,480\ \$$$

Môj predok vložil do banky 14 480 $.

Príklad 2.

Koľko musím teraz vložiť do banky, ak chcem svojmu dieťaťu darovať na 18. narodeniny 1 milión €, keď banka úročí vklad 3,45% a dieťa plánujem mať o 10 rokov?

Riešenie:

Je dané: K_0 = 1 000 000 ; *i* = 0,0345; *n* = 18 + 10 = 28

Dosadením do vzorca $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$ dostávame:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{1000000}{(1+0,0345)^{28}} = 386853,15$$

Do banky musím teraz vložiť 386 853,15 €.

Príklad 3.

Peter si otvoril účet v banke pri 9 % ročnej úrokovej miere a vložil naň 10 000 p. j. Po troch rokoch vybral z účtu 5 000 p. j. Akou sumou bude disponovať po ďalších 4 rokoch?

(11 222,48 p. j.)

Príklad 4.

Pri akej ročnej úrokovej miere sa daný vklad 3-násobí za obdobie 8 rokov?

(i = 0,147)

Príklad 5.

Nájdite budúcu hodnotu kapitálu 10 000 p. j. po desiatich rokoch, vloženého na účet ktorý poskytuje 8 % ročnú úrokovú mieru.

(21 589,25 p. j.)

2.24 Pojem výrazu , počtové operácie s mnohočlenmi – súčet , rozdiel

Príklad 1.

Pre aké hodnoty premennej x sú si rovné výrazy $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{\sqrt{x}}{x}$?

Riešenie:

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ pre x ≠ 0   x ≥ 0   výrazy sa rovnajú pre x   (0;∞)

Príklad 4.

Sčítajte mnohočleny $2a^2b^3 + 3ab + 5a + 7b,\ 7a + 3b + 3a^2b + a^2b^3$

Riešenie:

$$\begin{aligned}&\left(2a^2b^3 + 3ab + 5a + 7b\right) + \left(7a + 3b + 3a^2b + a^2b^3\right) = \\ &= \left(2a^2b^3 + a^2b^3\right) + 3ab + \left(5a + 7a\right) + \left(7b + 3b\right) + 3a^2b = \\ &= 3a^2b^3 + 3ab + 12a + 10b + 3a^2b\end{aligned}$$

Príklad 5.

Odčítajte od mnohočlena $a + b – c$ mnohočlen $– (b – 3c)$

Riešenie:

$$a + b - c - \left[-(b - 3c)\right] = a + b - c - \left(-b + 3c\right) = a + b - c + b - 3c = a + 2b - 4c$$

2.25 Súčin mnohočlenov, delenie mnohočlena jednočlenom

Príklad 1.

Násobte mnohočleny $2a+3a^2b+b, \quad a^2+2b$

Riešenie: $$\left(2a+3a^2b+b\right)\cdot\left(a^2+2b\right)=2a\cdot a^2+3a^2b\cdot a^2+b^2+2a\cdot 2b+3a^2b\cdot 2b+b\cdot 2b=$$
$$=2a^3+3a^4b+a^2b+4ab+6a^2b^2+2b^2$$

Príklad 2.

Delťe mnohočlen $18a^4-27a^3+9a^2-90a$ jednočlenom $9a$

Riešenie:

$$\left(18a^4-27a^3+9a^2-90a\right)\div 9a=$$
$$=\left[18a^4\div 9a\right]+\left[\left(-27a^3\right)\div 9a\right]+\left[9a^2\div 9a\right]+\left[\left(-90a\right)\div 9a\right]=$$
$$=2a^3-3a^2+a-10$$

2.26 Rozklad výrazov vynímaním

Riešenie:

Pretože všetky tri členy výrazu sú deliteľné výrazom $2ab$, tak tento výraz budeme vynímať pred zátvorku.

$$22ab^3+28a^2b^2+14a^4b=2ab\cdot 11b^2+2ab\cdot 14ab+2ab\cdot 7a^3=2ab\cdot\left(11b^2+14ab+7a^3\right)$$
$$22ab^3+28a^2b^2+14a^4b=2ab\cdot\left(11b^2+14ab+7a^3\right)$$

Príklad 2.

Rozložte na súčin výraz $18a-45a^2+63a^3$.

Riešenie:

Najvhodnejším spoločným deliteľom všetkých troch sčítancov je $9a$, potom platí:

$18a-45a^2+63a^3=9a\left(2-5a+7a^2\right)$ Príklad 4.

Rozložte na súčin:

a) $6a^2b-3a^2b^2$ b) $15a^5b^4-30a^3b^9$

c) $24m^3n^2+28mn^4$ d) $50a^2c^3+25ac^2-75a^4c^4$

e) $a^2-b^2+9a+9b$ f) $2x^5-x^4+y^4-2xy^4$

2.27 Rozklad výrazov pomocou vzorcov

Príklad 1.

Rozložte na súčin $x^2 - \frac{1}{9}$

Riešenie:

Použijeme vzorec $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$ v ktorom nech $a = x$, $b = \frac{1}{3}$

Dostaneme: $x^2 - \frac{1}{9} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Príklad 2.

Rozložte na súčin $9a^2 - 12ab + 4b^2$

Riešenie:

Použitím vzorca $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, v ktorom $a = 3a$, $b = 2b$, dostaneme:

$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2\cdot(3a)\cdot 2b + (2b)^2 = (3a-2b)^2$

Príklad 3.

Rozložte na súčin $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 8y^3$

Riešenie:

Použitím vzorca $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, v ktorom

$a = x$, $b = 2y$, dostaneme:

$$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 8y^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot 2y + 3\cdot x\cdot(2y)^2 + (2y)^3 = (x+2y)^3$$

Príklad 4.

Rozložte na súčin $27 - 8x^3y^6$

Riešenie:

Použitím vzorca $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$, v ktorom $a = 3$, $b = 2xy^2$ dostaneme rozklad:

$$27-8x^3y^6=\left(3-2xy^2\right)\cdot\left(3^2+3\cdot 2xy^2+\left(2xy^2\right)^2\right)=\left(3-2xy^2\right)\cdot\left(9+6xy^2+4x^2y^4\right)$$

2.28 Lomené výrazy

Príklad 1.

Určite, kedy majú zmysel výrazy:

a) $\frac{2-x}{2x}$ $(x\neq 0)$

b) $\frac{3}{4x^2}$ $(x\neq 0)$

c) $\sqrt{x-7}$ $\left(x\geq 7\right)$

$\frac{x+4}{(x-2)\cdot(x-3)}$ $\left(x\neq 2, x\neq 3\right)$

2.29 Úpravy lomených výrazov

Príklad 1.

Kráťte lomené výrazy a určite podmienky, pri ktorých majú výrazy zmysel

a) $\frac{4x}{12x^2}$ - čitateľ aj menovateľ sa dajú deliť číslom 4 a premennou x

$\frac{4x}{12x^2}=\frac{4x:4x}{12x^2:4x}=\frac{1}{3x}$, výraz má zmysel ak $x\neq 0$

b) $\frac{2a+8ax}{12ax^2}$ - najskôr si čitateľa upravíme, vyňatím pred zátvorku, na súčin

$\frac{2a+8ax}{12ax^2}=\frac{2a(1+4x)}{12ax^2}$ - čitateľ aj menovateľ sa dajú deliť číslom 2 a premennou *a*

$\frac{2a(1+4x)}{12ax^2}=\frac{1+4x}{6x^2}$, výraz má zmysel, ak x ≠ 0, a ≠ 0

c) $\frac{24r+24s}{(r+s)^2}$ - najskôr si čitateľa aj menovateľa rozložíme na súčin, čitateľa vyňatím pred zátvorku a menovateľa podľa vzorca $(a + b)^2$

$\frac{24r+24s}{(r+s)^2} = \frac{24\cdot(r+s)}{(r+s)\cdot(r+s)}$ - čitateľ aj menovateľ sa dajú deliť výrazom r + s

$$\frac{24\cdot(r+s)}{(r+s)\cdot(r+s)} = \frac{24}{r+s}$$, výraz má zmysel, ak r ≠ - s, s ≠ - r

Rozšíriť lomený výraz znamená vynásobiť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom alebo výrazom okrem nuly. Podmienky, pre ktoré má daný výraz zmysel určujeme vždy z menovateľa upraveného na súčin.

Príklad 2.

Rozšírte dané lomené výrazy výrazom v zátvorke a určte, kedy majú výrazy zmysel

a) $\frac{2x}{x+1} \quad (2x)$

nesmieme zabudnúť, že celého menovateľa máme rozšíriť výrazom 2x, preto si dáme menovateľa do zátvorky

$$\frac{2x\cdot 2x}{(x+1)\cdot 2x} = \frac{4x}{2x^2+2x}$$, výraz má zmysel, ak x ≠ 0, x ≠ -1

b) $\frac{x}{x+y} \quad (x-y)$

opäť nesmieme zabudnúť, že celého menovateľa máme rozšíriť celým výrazom x - y, preto dáme menovateľa aj výraz x - y do zátvoriek

$$\frac{x\cdot(x-y)}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{x^2-xy}{x^2-y^2}$$, výraz má zmysel, ak x ≠ ± y, y ≠ ± x

Príklad 3.

Doplňte lomený výraz tak, aby platila rovnosť a určite podmienky, kedy má výraz zmysel

$$\frac{x-1}{2x} = \frac{x^2-1}{?}$$

Riešenie:

čitateľa x – 1 sme na výraz x^2 – 1 rozšírili výrazom (x + 1), preto aby sa hodnota lomeného výrazu nezmenila, musíme aj menovateľa rozšíriť tým istým výrazom (x + 1),

$$\frac{x-1}{2x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{2x\cdot(x+1)}=\frac{x^2-1}{2x^2+2x}$$, výraz má zmysel, ak x ≠ 0, x ≠ -1

2.30 Výpočet hodnoty výrazu

Príklad 1.

Vypočítajte hodnotu daných algebrických výrazov pre dané hodnoty premenných:

a) V(x) = $\frac{2x-3}{2-x}-\frac{3}{4}$ pre x = 3; $\frac{1}{2}$

b) V(a)=3·(2x–8) pre a = 7; 2,5

Riešenie:

a) V(3) = $\frac{2.3-3}{2-3}-\frac{3}{4}=\frac{6-3}{-1}-\frac{3}{4}=\frac{3}{-1}-\frac{3}{4}=\frac{-12-3}{4}=\frac{-15}{4}$

V($\frac{1}{2}$) = $\frac{2.\frac{1}{2}-3}{2-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}=\frac{1-3}{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}=\frac{-2}{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}=\frac{-4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{-16-9}{12}=\frac{-25}{12}$

b) V(7) = 3·(2·7 – 8) =3.(14 – 8) = 3.6 = 18

V(2,5) = 3·(2·2,5 – 8) =3.(5 – 8) = 3.(-3) = – 9

Príklad 2.

Určite hodnotu výrazu pre dané číselné hodnoty premenných:

a) $\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{a}\right).\left(b+\dfrac{1}{b}\right)}{ab+\dfrac{1}{ab}}$ $\quad$ *pre* $\quad a=1, b=2$

b) $\dfrac{x^2+y^2+z^2-5xyz}{x+y+z}$ $\quad$ *pre* $\quad x=-1, y=2, z=4$

a) 2 $\qquad$ b) $\dfrac{61}{5}$

Príklad 3.

Oceľový ingot má tvar kvádra s rozmermi 650 mm, 600 mm a 1700 mm. Hustota ocele ingotu je 6 500 kg.m^{-3}. Vypočítajte hmotnosť ingotu.

(4309,5 kg)

2.31 Zložené lomené výrazy

Príklad 1.

Vypočítajte: $\dfrac{\dfrac{2-x}{x+3}}{\dfrac{4-4x}{x^2+3x}}$

Riešenie:

$$\frac{\dfrac{2-x}{x+3}}{\dfrac{4-4x}{x^2+3x}}=\frac{(2-x)\cdot(x^2+3x)}{(x+3)\cdot(4-4x)}=\frac{(2-x)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot 2\cdot(2-x)}=\frac{x}{2}$$

podmienky riešiteľnosti: $x\neq-3 \quad x\neq0 \quad x\neq1$

Príklad 2.

Vypočítajte:

a) $$\frac{\frac{1}{1-y}-1}{1-\frac{1-2y^2}{1-y}+y}$$

b) $$\frac{\frac{2s+1}{2s-1}-\frac{2s-1}{2s+1}}{\frac{4s}{10s-5}}$$

c) $$2+\frac{1}{3-\frac{1}{x-2}}$$

a) $\frac{1}{y}$, $y \neq 1$ b) $\frac{10}{2s+1}$, $s \neq 0, s \neq \pm\frac{1}{2}$ c) $\frac{7x-16}{3x-7}$, $x \neq 2, x \neq \frac{7}{3}$

3. Vzťahy, funkcie, tabuľky a diagramy

3.1 Lineárna rovnica, Riešenie lineárnych rovníc

Príklad 1.

Riešte rovnicu $5x - 3 = 7$

Riešenie:

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 7 \qquad /+3 \\ 5x &= 10 \qquad /:5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Skúška správnosti:

Ľ = $5 \cdot 2 - 3 = 10 - 3 = 7$

P = 7

Ľ = P

Teda množina riešení danej rovnice je P = {2}.

Príklad 2.

Riešte rovnicu $2x - 7 = 5x + 9$

Riešenie:

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= 5x + 9 \quad /-5x+7 \\ 2x - 5x &= 9 + 7 \\ -3x &= 16 \qquad /:(-3) \\ x &= \frac{-16}{3} \end{aligned}$$

Skúška:

Ľ = $2 \cdot \frac{-16}{3} - 7 = \frac{-32}{3} - 7 = \frac{-32-21}{33} = \frac{-53}{3}$

P = $5 \cdot \frac{-16}{3} + 9 = \frac{-80}{3} + 9 = \frac{-80+27}{3} = \frac{-53}{3}$

Ľ = P

Teda množina riešení danej rovnice je P = $\{\frac{-16}{3}\}$.

3.2 Lineárne rovnice s neznámou v menovateli zlomku

Príklad 1.

Riešte rovnicu a vykonajte skúšku správnosti

$$\frac{x+2}{2\cdot(x+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{x+4}{4(x+1)}$$

určíme podmienky, pre ktoré majú menovatele zmysel $x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

riešime rovnicu pomocou ekvivalentných úprav

$$\frac{x+2}{2\cdot(x+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{x+4}{4(x+1)} \qquad /\cdot 4\cdot(x+1)$$

$$2\cdot(x+2)-2\cdot(x+1)=-x-4$$

$$2x+4-2x-2=-x-4$$

$$2=-x-4 \qquad /+x-2$$

$$x=-2-4$$

$$x=-6$$

Porovnáme, či koreň rovnice vyhovuje podmienkam určeným na začiatku

$x \neq -1 \wedge x = -6$ koreň rovnice vyhovuje podmienke

Vykonáme skúšku správnosti, v ktorej do zadania rovnice si za neznámu dosadíme koreň, ktorý nám vyšiel

ĽS: $\frac{-6+2}{2\cdot(-6+1)}-\frac{1}{2}=\frac{-4}{-10}-\frac{1}{2}=\frac{4-5}{10}=\frac{-1}{10}$

PS: $-\frac{(-6)+4}{4\cdot(-6+1)}=\frac{2}{-20}=\frac{-1}{10}$

$$ĽS = PS \qquad \rightarrow \qquad P = \{-6\}$$

Príklad 2.

Riešte rovnicu

$$\frac{2u}{u-2} = \frac{4}{u-2}$$

Podmienka $\qquad u \neq 2$

Riešenie rovnice

$$\frac{2u}{u-2} = \frac{4}{u-2} \quad / \cdot (u-2)$$

$$2u = 4$$

$$u = 2$$

Porovnaním koreňa s podmienkou zistíme, že obor pravdivosti je prázdna množina.

$$P = \{\emptyset\}$$

3.3 Vyjadrenie neznámej zo vzorca

Príklad 1.

V trojuholníku ABC poznáme stranu c = 5 cm a jeho obsah S = 10 cm^2. Vypočítajte výšku na stranu c.

Riešenie:

pretože poznáme obsah trojuholníka, použijeme vzorec na jeho výpočet $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$

vzorec si upravíme

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} \qquad / \cdot 2$$

$$2S = c \cdot v_c$$

$$\frac{2S}{c} = v_c$$

teraz do upraveného vzorca dosadíme a vypočítame výšku

$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$$

Výška v trojuholníku ABC je 4 cm.

Príklad 2.

Zo vzorca na výpočet obsahu lichobežníka vyjadrite základňu a.

Riešenie:

obsah lichobežníka vypočítame podľa vzorca $S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$

vzorec upravíme:

$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2S = (a+c) \cdot v \quad / : v$$

$$\frac{2S}{v} = a + c \qquad / - c$$

$$\frac{2S}{v} - c = a$$

$$\frac{2S - v \cdot c}{v} = a$$

Príklad 3.

Určite, v akej hĺbke je poklop ponorky, ktorá je v mori, ak naň pôsobí hydrostatický tlak 512,5 kPa. Hustota morskej vody je 1025 kg/ m^3, gravitačná konštanta g = 10 N/ kg.

Riešenie:

hydrostatický tlak vypočítame podľa vzorca $p_h = \circ \cdot g \cdot h$

vzorec upravíme:

$$p_h = \circ \cdot g \cdot h \quad / : (\circ \cdot g)$$

$$\frac{p_h}{\circ \cdot g} = h$$

do upraveného vzťahu dosadíme a vypočítame požadovanú hĺbku, pričom však nesmieme zabudnúť premeniť tlak v kilopascaloch na pascaly

512,5 kPa = 512 500 Pa

$$h = \frac{p_h}{° \cdot g} = \frac{515500}{1025 \cdot 10} = 50$$

Poklop ponorky je v hĺbke 50 m.

Príklad 4.

Z daných vzorcov vyjadrite neznáme veličiny uvedené v hranatej zátvorke

a) $V = \frac{4}{3} \cdot ® \cdot r^3$ $\qquad [r]$

b) $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ $\qquad [m, v]$

c) $m_1 \cdot c_1 (t - t_1) = m_2 \cdot c_2 (t - t_2)$ $\qquad [c_1]$

3.4 Riešenie úloh

Príklad 1.

Riešte rovnicu

$$\frac{(x-1)^2}{x-2} = x + \frac{1}{x-2} \qquad [P = R - \{2\}]$$

Príklad 2.

Riešte rovnicu

$$\frac{x-2}{x-1} = \frac{x+1}{x+2} \qquad [P = ¤]$$

Príklad 3.

Vyjadri zo vzorca:

a) pre mechanickú prácu: $W = F \, . \, s$ silu F

b) pre výpočet obsahu kosoštvorca $S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$ uhlopriečku u_1

c) pre hustotu $° = \frac{m}{V}$ hmotnosť m

d) pre povrch kocky: $S = 6a^2$ dĺžku hrany a

e) povrch valca: $S = 2\pi r(r + v)$ veľkosť výšky v

f) obsah lichobežníka: $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ základňu c

g) pre obsah trojuholníka ABC $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot r}$ polomer opísanej kružnice r

h) pre obsah kruhu: $S = \pi r^2$ polomer kruhu

Príklad 4.

Keď zväčšíme dvojnásobok čísla o jeho polovicu, dostaneme trojnásobok tohto čísla zmenšeného o dve. Ktoré je to číslo?

(12)

Príklad 5.

Pozorne si pozrite riešenie nasledujúcej rovnice:

$$\frac{1}{2-y} + \frac{3}{y-2} = \frac{4}{2-y} + \frac{3y+3}{y-2} \qquad |.(y-2)$$

$$-1 + 3y + y - 2 = -4 + 3y + 3$$

$$4y - 3 = 3y - 1$$

$$y = 2$$

$P = \{2\}$

Zdôvodnite, prečo uvedený koreň rovnice nie je správny.

3.5 Lineárne rovnice s absolútnou hodnotou

Príklad 1.

Riešte v R rovnicu : $|x + 2| + |x - 2| = 8$.

Riešenie:

Určíme nulové body výrazov $x + 2$ a $x - 2$. Teda zistíme, pre ktoré hodnoty premennej x sa $x + 2 = 0$ a $x - 2 = 0$. Označíme $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ ($x_1 < x_2$). Množina R je nimi rozdelená na intervaly : $I_1 = (-\infty, -2)$, $I_2 = \langle -2, 2 \rangle$, $I_3 = (2, +\infty)$, na ktorých je možné danú rovnicu s absolútnymi hodnotami upraviť na rovnice bez absolútnych hodnôt. Stačí určiť znamienka ľubovoľných hodnôt dvojčlenov $x + 2$, $x - 2$ vo vnútri intervalov I_1, I_2, I_3 : x ,$(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$\|x + 2\|$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\|x - 2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\|x + 2\| + \|x - 2\| = 8.$	$-x-2-x+2=8$ $x = -4 \in I_1$	$x+2-x+2=8$ $4 \neq 8$	$x+2+x-2=8$ $x = 4 \in I_3$
	$K_1 = \{-4\}$	$K_2 = \emptyset$	$K_3 = \{4\}$

Výsledok: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{4, -4\}$

Grafická metóda :

Niektoré rovnice môžeme riešiť tak, že zostrojíme graf funkcie na ľavej strane rovnice a graf funkcie na pravej strane rovnice. X-sové súradnice priesečníkov grafov sú koreňmi rovnice.

Príklad 2.

Riešte v R rovnicu : $|5 - x| = |x + 4|$.

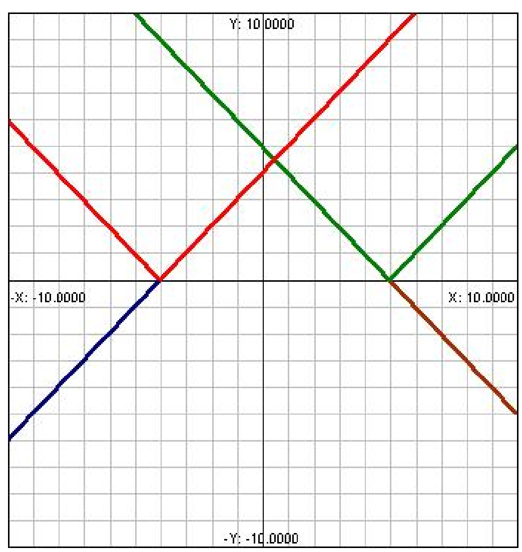
Riešenie:

Zostrojíme grafy funkcií f : $y = |5 - x|$ a g : $y = |x + 4|$.

Súradnice x ich priesečníkov sú korene danej rovnice.

Postupnosť zostrojovania grafov :

1. Zostrojíme graf funkcie f_1: $y = 5 - x$
2. Zostrojíme graf funkcie f_2: $y = |5 - x|$
3. Zostrojíme graf funkcie f_3: $y = x + 4$
4. Zostrojíme graf funkcie f_4: $y = |x + 4|$



Riešením sú priesečníky grafov funkcií f_2 a f_4.

3.6 Lineárne nerovnice

Príklad 1:

Riešte nerovnicu s neznámou x $\in$ R.

$$2\cdot(5x-1)-11\cdot\left(x-\frac{7}{33}\right)\geq 13\left(\frac{1}{3}+x\right)-12x$$

Riešenie:

$$2\cdot(5x-1)-11\cdot\left(x-\frac{7}{33}\right)\geq 13\cdot\left(\frac{1}{3}+x\right)-12x$$

$$10x-2-11x+\frac{7}{3}\geq\frac{13}{3}+13x-12x$$

$$-x+\frac{1}{3}\geq\frac{13}{3}+x \qquad /\cdot 3$$

$$-3x+1\geq 13+3x \qquad /-3x$$

$$-6x+1\geq 13 \qquad /-1$$

$$-6x\geq 12 \qquad /:(-6)$$

$$x\leq -2$$

Teda množina riešení danej nerovnice je P = $\left(-\infty,-2\right\rangle$

Príklad 2.

Riešte nerovnice s neznámou x ϵ R:

a) $3.(2x-4)<5.(3+3x)$ $\qquad [(-3,\infty)]$

b) $\dfrac{x-3}{5}-\dfrac{6-2x}{3}\geq 2$ $\qquad \left[\left\langle\dfrac{69}{13},\infty\right)\right]$

c) $2.(6-2x)-3.(0{,}5+x)\geq 5{,}5+3x$ $\qquad \left[\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right\rangle\right]$

3.7 Sústava lineárnych nerovníc

Sústavu nerovníc s jednou neznámou *x* nazývame dve a viac nerovníc s premennou *x*, ktoré majú platiť súčasne.

Riešime ich tak, že každú nerovnicu vyriešime samostatne a celkové riešenie sústavy určíme ako prienik riešení jednotlivých nerovníc.

Príklad 1.

Riešte sústavu nerovníc s premennou $x \in R$

$$\frac{4x-5}{7} < x+3$$

$$\frac{3x+8}{4} \geq 2x-5$$

Riešenie:

Najskôr vyriešime prvú nerovnicu

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{7} &< x+3 \quad /.7 \\ 4x-5 &< 7x+21 \qquad /-7x+5 \\ -3x &< 26 \qquad /.(-3) \\ x &> -\frac{26}{3} \end{aligned}$$

$$P_1 = \left(-\frac{26}{3}, \infty\right)$$

Samostatne vyriešime aj druhú nerovnicu

$$\begin{aligned} \frac{3x+8}{4} &\geq 2x-5 \,/.4 \\ 3x+8 &\geq 8x-20 \qquad /-8x-8 \\ -5x &\geq -28 \qquad /:(-5) \\ x &\leq \frac{28}{5} \end{aligned}$$

$$P_2 = \left(-\infty, \frac{28}{5}\right\rangle$$

Množinu všetkých koreňov sústavy tvorí prienik $P_1 \cap P_2$

$$P_1 \cap P_2 = \left(-\frac{26}{3}, \infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{28}{5}\right\rangle = \left(-\frac{26}{3}, \frac{28}{5}\right\rangle$$

Príklad 2.

Riešte sústavu nerovníc s premennou $x \in R$

$$\frac{x}{7}+\frac{3x-5}{2}\leq\frac{5-2x}{2}$$

$$\frac{1}{4}\cdot(3-2x)\geq 1{,}5-\frac{x}{6}$$

$$\left[\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right\rangle\right]$$

3.8 Lineárne nerovnice v súčinovom tvare

Vypočítajte Príklad 1.

nerovnicu : $(x - 5).(3 + x) > 0$

Postup:

I. Metódou nulových bodov

Nulové body : $(x - 5) = 0$ $\quad$ $(3 + x) = 0$ $\quad$ NB = {-3;5}

$x = 5$ $\quad$ $x = -3$

$+ \quad -3 \quad - \quad 5 \quad +$

$-10 \in (-\infty;-3) \Rightarrow -10 - 5 < 0$ a $3 - 10 < 0 \Rightarrow (-).(-) = (+)$

$0 \in (-3; 5) \Rightarrow 0 - 5 < 0$ a $3 - 0 > 0 \Rightarrow (-).(+) = (-)$

$10 \in (5; \infty) \Rightarrow 10 - 5 > 0$ a $3 + 10 > 0 \Rightarrow (+).(+) = (+)$

Riešením nerovnice je:

$$K = (-\infty;-3) \cup (5;\infty)$$

II. Analýzou úlohy

$(x - 5).(3 + x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x - 5 > 0 \wedge 3+x > 0] \vee [x - 5 < 0 \wedge 3 + x < 0] \Leftrightarrow [x > 5 \wedge x > -3] \vee [x < 5 \wedge x < -3] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x \in (5;\infty)] \cup [x \in (-\infty;-3)]$

Riešením nerovnice je:

$$K = (-\infty;-3) \cup (5;\infty)$$

Pri analýze postupujeme:

1. $(x - 5).(3 + x) > 0 \Leftrightarrow [x - 5 > 0 \wedge 3 + x > 0] \vee [x - 5 < 0 \wedge 3 + x < 0]$
2. $(x - 5).(3 + x) \geq 0 \Leftrightarrow [x - 5 \geq 0 \wedge 3 + x \geq 0] \vee [x - 5 \leq 0 \wedge 3 + x \leq 0]$
3. $(x - 5).(3 + x) < 0 \Leftrightarrow [x - 5 > 0 \wedge 3 + x < 0] \vee [x - 5 < 0 \wedge 3 + x > 0]$
4. $(x - 5).(3 + x) \leq 0 \Leftrightarrow [x - 5 \geq 0 \wedge 3 + x \leq 0] \vee [x - 5 \leq 0 \wedge 3 + x \geq 0]$

Príklad 2.

Riešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $(6 - x)\cdot(5x - 2) \leq 0$ b) $(2x - 3)\cdot(7 - 3x) > 0$

a) $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right\rangle \cup \langle 6, \infty)$ b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$

3.9 Lineárne nerovnice v podielovom tvare

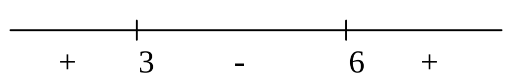
Príklad 1.

Vypočítajte nerovnicu : $(x - 6):(3 - x) \leq 0$ D = R – {3} (v tvare zlomku $\frac{x-6}{3-x} \leq 0$)

Postup:

I. Metódou nulových bodov

Nulové body : $(x - 6) = 0$, $x = 6$; $(3 - x) = 0$, $x = 3$; NB = {3; 6}



$-10 \in (-\infty; 3) \Rightarrow -10 - 6 < 0$ a $3 + 10 > 0 \Rightarrow (-).(+) = (-)$

$4 \in (3; 6) \quad \Rightarrow \quad 4 - 6 < 0 \ \text{ a } \ 3 - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-).(-) = (+)$

$10 \in (6; \infty) \quad \Rightarrow \quad 10 - 6 > 0 \ \text{ a } \ 3 - 10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (+).(-) = (-)$

Riešením nerovnice je:

$K = (-\infty; 3) \cup \langle 6; \infty) \qquad -3 \notin D$

II. Analýzou úlohy

$(x - 6) : (3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow [x - 6 \geq 0 \wedge 3 - x < 0] \vee [x - 6 \leq 0 \wedge 3 - x > 0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x \geq 6 \wedge x > 3] \vee [x \leq 6 \wedge x < 3] \Leftrightarrow [x \in \langle 6; \infty)] \cup [x \in (-\infty; 3)]$

Upozornenie: nulou sa nedá deliť, preto sú pri deliteľovi ostré nerovnosti.

Riešením nerovnice je:

$K = (-\infty; 3) \cup \langle 6; \infty)$

Pri analýze postupujeme:

1. $(x - 6) : (3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow [x - 6 \geq 0 \wedge 3 - x < 0] \vee [x - 6 \leq 0 \wedge 3 - x > 0]$
2. $(x - 6) : (3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow [x - 6 \geq 0 \wedge 3 - x > 0] \vee [x - 6 \leq 0 \wedge 3 - x < 0]$
3. $(x - 6) : (3 - x) > 0 \Leftrightarrow [x - 6 > 0 \wedge 3 - x > 0] \vee [x - 6 < 0 \wedge 3 - x < 0]$
4. $(x - 6) : (3 - x) < 0 \Leftrightarrow [x - 6 > 0 \wedge 3 - x < 0] \vee [x - 6 < 0 \wedge 3 - x > 0]$

Príklad 2.

V obore reálnych čísel riešime nerovnicu:

$$\frac{3x+5}{x+2} \geq 0 \qquad .|(x+2)$$

$$3x + 5 \geq 0$$

$$3x \geq -5$$

$$x \geq -\frac{5}{3}$$

$$P = \left\langle -\frac{5}{3}, \infty \right)$$

Uvedený postup riešenia nerovnice nie je správny. Vysvetlite prečo.

Príklady 3.

Riešte nerovnice v podielovom tvare

a) $\frac{4-x}{2x-3} > 0$ b) $\frac{9-2x}{5-4x} \leq 0$ c) $\frac{2x-1}{3-x} \geq 2$

a) $(1{,}5;4)$ b) $(1{,}25;4{,}5\rangle$ c) $\langle 1{,}75;3)$

3.10 Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Príklad 1.

Riešte sústavu rovníc s neznámymi x, y $\in$ R.

$$2x-3y=5$$
$$x-2y=1$$

Riešenie:

Z prvej rovnice si vyjadríme napríklad neznámu x:

$$2x-3y=5 \qquad /+3y$$
$$2x=5+3y \qquad /:2$$
$$x=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}y$$

Výraz, ktorý sme získali dosadíme do druhej rovnice za neznámu *x*:

$$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}y-2y=1$$

Získali sme lineárnu rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime:

$$\frac{5}{2}+\frac{3}{2y}-2y=1 \qquad /\cdot 2$$
$$5+3y-4y=2$$
$$5-y=2 \qquad /-5$$
$$-y=-3$$
$$y=3$$

Získanú neznámu dosadíme do upravenej prvej rovnice a vypočítame neznámu x:

$$x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Skúšku správnosti urobíme dosadením vypočítaných hodnôt neznámych do obidvoch rovníc:

Ľ1 $= 2 \cdot 7 - 3 = 14 - 9 = 5$ Ľ2 $= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 6 = 1$

P1 = 5 P2 = 1

Ľ1 = P1 Ľ2 = P2

Riešením sústavy je usporiadaná dvojica [x; y] = [7; 3].

Príklad 2:

Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 3a - 5b &= 1 \\ 4a - 3b &= 5 \end{aligned}$$

s neznámymi a, b R dosadzovacou metódou.

Sčítacia (adičná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že každú rovnicu po úprave na základný tvar, napríklad $2x + 3y = 4$ vhodne násobíme tak, aby po sčítaní oboch rovníc jedna neznáma vypadla.

Takto dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Pri čistej sčítacej metóde to isté vykonáme i s druhou neznámou. V praxi je často využívaná kombinácia sčítacej a dosadzovacej metódy, čiže jednu neznámu určíme sčítacou metódou a druhú dosadením už známej hodnoty do niektorej z rovníc.

Príklad 4:

Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 5c - 3d &= 1 \\ -c - 7d &= 15 \end{aligned}$$

s neznámymi c, d R kombináciou sčítacej a dosadzovacej metódy.

Porovnávacia (komparačná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že z oboch rovníc si vyjadríme tú istú neznámu.

Získané výrazy porovnáme a tak dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Príklad 5:

Riešte sústavu rovníc

$$2x - 3y = 5$$

$$x - 2y = 1$$

s neznámymi x, y R.

Riešenie:

Z prvej rovnice si vyjadríme napr. neznámu x:

$$2x - 3y = 5 \qquad /+3y$$

$$2x = 5 + 3y \qquad /:2$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}y$$

Z druhej rovnice si vyjadríme tiež neznámu x:

$$x - 2y = 1 \qquad /+2y$$

$$x = 1 + 2y$$

Keďže sa rovnajú ľavé strany oboch rovníc, tak sa rovnajú i pravé strany týchto rovníc, takže vytvoríme rovnicu P1=P2, ktorú vyriešime:

$$1 + 2y = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}y \qquad /\cdot 2$$

$$2 + 4y = 5 + 3y \qquad /-2-3y$$

$$y = 3$$

Získanú hodnotu premennej y dosadíme napríklad do upravenej druhej rovnice:

$x = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

Skúšku správnosti urobíme dosadením vypočítaných hodnôt neznámych do obidvoch rovníc podobne ako v príklade 1 a 3.

Riešením danej sústavy je usporiadaná dvojica [x; y] = [7; 3].