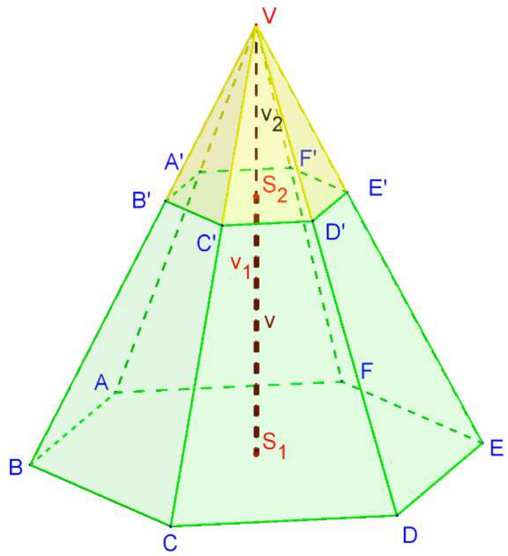
Povrch a objem zrezaného ihlana

Ak je daný jeden ihlan a zoberieme rovinu rovnobežnú s postavou, prechádzajúcu ihlanom, potom táto rovina rozdelí teleso na dve telesá. Jedno teleso je ihlan (pôvodný zmenšený – stredom rovnoľahlosti je vrchol, koeficient rovnoľahlosti dostaneme ako podiel výšok: výška zmenšeného delená výškou pôvodného).
Druhé teleso je zrezaný ihlan (ABCDEFA'B'C'D'E'F').



podstavy (dolná: ABCDEF a horná: A'B'C'D'E'F') – dva rovnobežné, podobné mnohouholníky
výška: v – vzdialenosť podstáv
hrana podstavy (podstavná hrana: AB, BC, …, E'F', F'A') – každá strana podstáv
bočná hrana (AA', BB', CC', FF') – spojnica vrcholov dolnej a hornej podstavy
bočná stena (ABB'A', BCC'B', …) – sú ohraničené susednými bočnými hranami a dvomi podstavnými hranami; sú to lichobežníky; ich počet sa rovná počtu vrcholov (strán) podstavy
plášť zrezaného ihlana – súhrn bočných stien

kolmý zrezaný ihlan – ak pôvodný ihlan bol kolmý, aj zrezaný bude: spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou)
pravidelný n-boký zrezaný ihlan – ak pôvodný ihlan bol pravidelný n-boký, aj zrezaný bude: podstavy sú pravidelné n-uholníky; spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou); steny sú rovnoramenné lichobežníky

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$
$$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

Dô.

označme v pôvodnom ihlane objekty s indexom 1 – V_1, S_1, v_1
označme v zmenšenom ihlane objekty s indexom 2 – V_2, S_2, v_2
označme v zrezanom ihlane objekty bez indexu – V, S, v

objem zrezaného ihlana dostaneme ako rozdiel objemov:

$$V = V_1 - V_2$$
$$V = \tfrac{1}{3}S_1.v_1 - \tfrac{1}{3}S_2.v_2 \qquad /.3$$
$$3V = S_1.v_1 - S_2.v_2 = S_1.(v + v_2) - S_2.v_2 = S_1.v + S_1.v_2 - S_2.v_2 = S_1.v + v_2(S_1 - S_2)$$
$$3V = S_1.v + S_2.v_2\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)$$

pre výšky platí

$$v = v_1 - v_2 \longrightarrow v_1 = v + v_2$$

pre koeficient rovnoľahlosti platí (opačná rovnoľahlosť, ako v definícii zrezaného ihlana)

$$\lambda = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v+v_2}{v_2}$$

upravíme

$$\lambda.v_2 = v + v_2$$
$$\lambda.v_2 - v_2 = v$$

$v_2(\lambda - 1) = v$

potom pre obsahy podstáv platí

$$\lambda^2 = \frac{S_1}{S_2} \rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

$$3V = S_1.v + S_2.v_2(\lambda^2 - 1) = S_1.v + S_2.v_2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

namiesto zvýrazneného výrazu pôjde v

$$3V = S_1.v + S_2.v(\lambda + 1) = S_1.v + S_2.v.\lambda + S_2.v$$

$$3V = S_1.v + S_2.v.\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + S_2.v = S_1.v + v.\sqrt{S_2^2\frac{S_1}{S_2}} + S_2.v$$

po zjednodušení a vyňatí ostáva

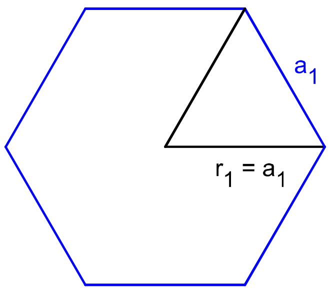
$$3V = S_1.v + v.\sqrt{S_1.S_2} + S_2.v = v\left(S_1 + \sqrt{S_1.S_2} + S_2\right)$$

$$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

príklad:

Vypočítajte povrch a objem pravidelného šesťbokého zrezaného ihlana, ak je dĺžka hrany dolnej podstavy 42, hornej podstavy 18 a ak dĺžka bočnej hrany je 37.

podstavy sú pravidelné šesťuholníky – rozdelíme ich na šesť rovnoramenných (sú vlastne rovnostranné) trojuholníkov



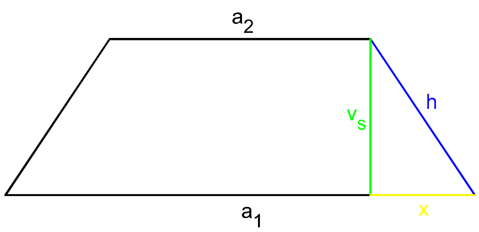
$$S_{\Delta 1} = \frac{ab.\sin\gamma}{2} = \frac{a_1^2.\sin 60°}{2} = \frac{42^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 441\sqrt{3} = 763{,}83$$

$$S_1 = 6.S_{\Delta 1} = 6.763{,}83 = 4\,583{,}0$$

$$S_{\Delta 2} = \frac{a_2^2.\sin 60°}{2} = \frac{18^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 81\sqrt{3} = 140{,}30$$

$$S_2 = 6.S_{\Delta 2} = 6.140{,}30 = 841{,}78$$

plášť tvoria rovnoramenné lichobežníky



$$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{42-18}{2} = 12$$

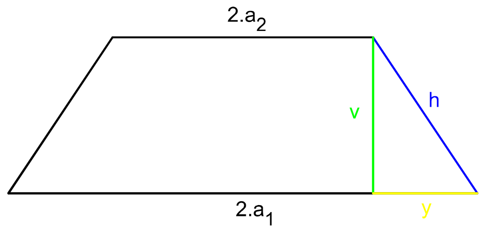
$$v_s = \sqrt{h^2 - x^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1\,369 - 144} = 35$$

$$S_{pl} = 6.\frac{a_1+a_2}{2}.v_s = 6.\frac{42+18}{2}.35 = 6\,300$$

takže povrch

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 4\,583{,}0 + 841{,}78 + 6\,300 = \underline{\underline{11\,724{,}8}}$$

k objemu chýba ešte výška telesa – osový rez prechádzajúci protiľahlými bočnými hranami, je lichobežník, v ktorom výška je výškou telesa



$y = \frac{2a_1 - 2a_2}{2} = \frac{2.42 - 2.18}{2} = 24$

$v = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{37^2 - 24^2} = \sqrt{1\,369 - 576} = \sqrt{793}$ =28,16

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{28{,}16}{3}\left(4\,583{,}0 + \sqrt{4\,583{,}0.841{,}78} + 841{,}78\right) = \underline{\underline{69\,358{,}0}}$

Vypočítajte povrch a objem pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana, ak je dĺžka hrany dolnej podstavy 22, hornej podstavy 12 a ak výška je 8.

podstavy sú štvorce

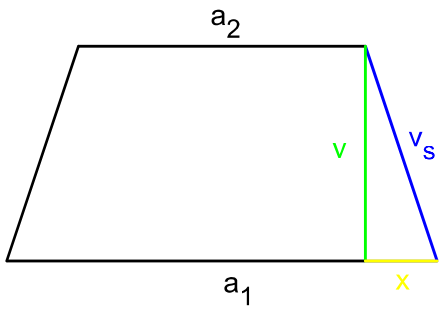
$S_1 = a_1^2 = 22^2 = 484$

$S_2 = a_2^2 = 12^2 = 144$

výšku poznáme, takže teraz skôr vypočítame objem

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{8}{3}\left(484 + \sqrt{484.144} + 144\right) = \underline{\underline{2\,378{,}67}}$

ak zobereme osový rez (lichobežník), ktorý prechádza stredmi protiľahlých hrán podstáv, ramená budú výšky bočných stien, a výška rezu je výška telesa



$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5$

$v_s = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9{,}43$

$S_{pl} = 4.\frac{a_1 + a_2}{2}.v_s = 4.\frac{22+12}{2}.9{,}43 = 641{,}51$

$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 484 + 144 + 641{,}51 = \underline{\underline{1\,269{,}51}}$

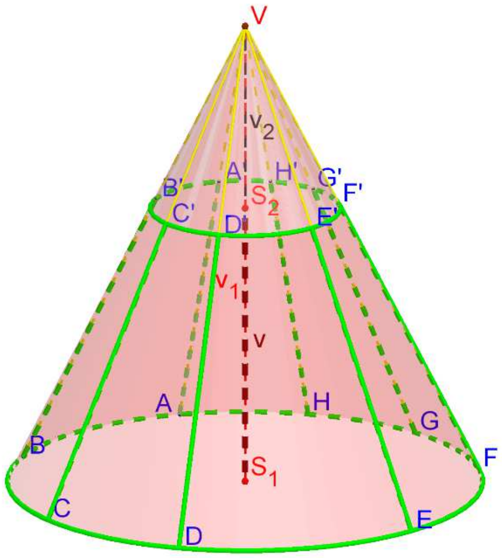
Vypočítajte objem pravidelného šesťbokého zrezaného ihlana, ak je dĺžka hrany dolnej podstavy 30 *cm*, hornej podstavy 12 *cm* a ak dĺžka bočnej hrany je 41 *cm*.

Vypočítajte povrch betónového podstavca v tvare pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana, ktorého výška má dĺžku 0,12 *m* a podstavy majú dĺžky hrán 0,24 *m* a 0,16 *m*.

Hore otvorená nádoba z plechu má tvar pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana. Ktorého dĺžka hrany hornej podstavy je 22 *cm*, dolnej podstavy 10 *cm* a dĺžka výšky 8 *cm*. Vypočítajte hmotnosť nádoby, ak viete že 1 m^2 plechu má hmotnosť 13 *kg*.

Povrch a objem zrezaného kužeľa

Ak je daný jeden kužeľ a zobereme rovinu rovnobežnú s postavou, prechádzajúcu kužeľom, potom táto rovina rozdelí teleso na dve telesá. Jedno teleso je kužeľ (pôvodný zmenšený – stredom rovnoľahlosti je vrchol, koeficient rovnoľahlosti dostaneme ako podiel výšok: výška zmenšeného delená výškou pôvodného).
Druhé teleso je zrezaný kužeľ.



podstavy (dolná a horná) – dva rovnobežné, podobné krivkami ohraničené rovinné útvary
výška: v – vzdialenosť podstáv
strana zrezaného kužeľa – spojnica hraničných bodov dolnej a hornej podstavy
plášť zrezaného kužeľa – súhrn strán

kolmý zrezaný kužeľ – ak pôvodný kužeľ bol kolmý, aj zrezaný bude: spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou)
zrezaný rotačný kužeľ – ak pôvodný kužeľ bol rotačný, aj zrezaný bude: podstavy sú kruhy; spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou); strany sú zhodné

aj zrezaný rotačný kužeľ je rotačné teleso – vznikne rotáciou pravouhlého lichobežníka okolo kolmého ramena
osový rez tohto telesa je rovnoramenný lichobežník
rozvinutý plášť je výsek z medzikružia

všeobecný zrezaný kužeľ:

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

zrezaný rotačný kužeľ:

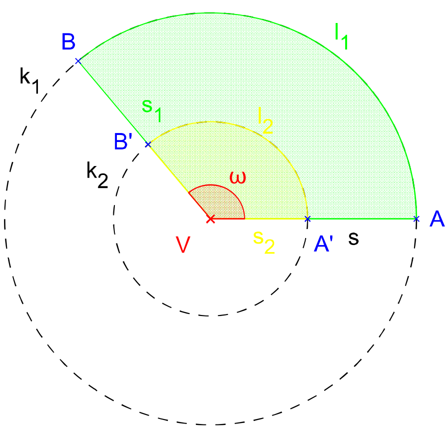
$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2)$

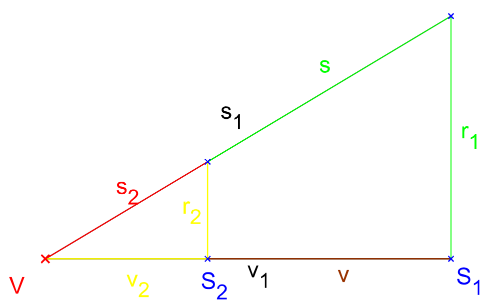
$V = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

Dô.

vo všeobecnom vzorci nahradíme obsahy podstáv s obsahmi kruhov

$S_1 = \pi r_1^2$ a $S_2 = \pi r_2^2$





plášť dostaneme ako rozdiel plášťov rotačných kužeľov

$S_{pl} = S_{pl1} - S_{pl2} = \pi.r_1.s_1 - \pi.r_2.s_2$

pre strany kužeľov a zrezaného rotačného kužeľa platí

$s = s_1 - s_2 \rightarrow s_1 = s + s_2$

pomer strán a polomerov je rovnaký

$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow r_1 = \frac{s_1}{s_2}.r_2$

dosadíme

$\pi.r_1.s_1 - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.(s + s_2) - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.s + \pi.r_1.s_2 - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.s + \pi.\frac{s_1}{s_2}.r_2.s_2 - \pi.r_2.s_2 =$

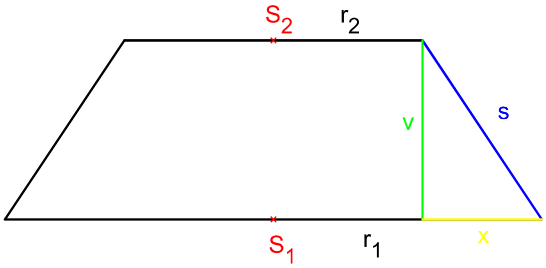
$= \pi.r_1.s + \pi.s_1.r_2 - \pi.r_2.s_2 = \pi.r_1.s + \pi.r_2.(s_1 - s_2) = \pi.r_1.s + \pi.r_2.s$

môžeme vyňať π.s → a tak dostaneme, čo sme chceli dokázať

$S_{pl} = \pi.s(r_1 + r_2)$

príklad:

Vypočítajte povrch a objem rotačného zrezaného kužeľa, ak je dĺžka polomeru dolnej podstavy 18, polomeru hornej podstavy 12 a výšky telesa 8.



vypočítame stranu

$x = r_1 - r_2 = 18 - 12 = 6$

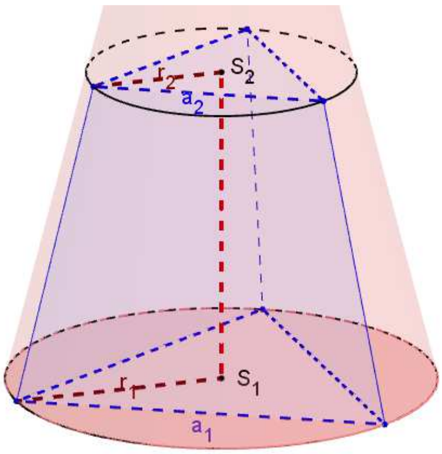
$s = \sqrt{x^2 + v^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

dosadíme

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2) = \pi.18^2 + \pi.12^2 + \pi.10(18 + 12) = 324\pi + 144\pi + 300\pi = \underline{\underline{768\pi}} = \underline{\underline{2\,412{,}7}}$

$V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi.8}{3}(18^2 + 18.12 + 12^2) = \frac{8\pi}{3}(324 + 216 + 144) = \frac{8\pi}{3}.684 = \underline{\underline{1\,824\pi}} = \underline{\underline{5\,730{,}3}}$

Pravidelný zrezaný trojboký ihlan je vpísaný do rotačného zrezaného kužeľa. O koľko percent má menší objem?



telesá majú rovnakú výšku

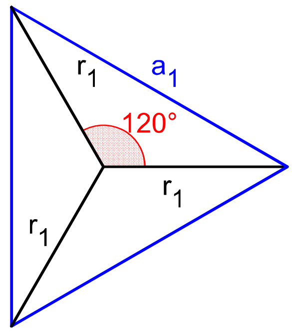
zrezaný kužeľ má objem

$V_{ZK} = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

zrezaný ihlan má objem

$V_{ZI} = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

skúsme vyjadriť obsahy podstáv zrezaného ihlana pomocou polomerov kruhov



polomery rozdelia podstavu na tri zhodné rovnoramenné trojuholníky s uhlom ramien 120°

$$S_1 = 3.S_{\Delta 1} = 3.\frac{r_1^2.\sin 120°}{2} = 3.\frac{r_1^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r_1^2$$

podobne postupujeme aj s hornou podstavou

$$S_2 = 3.S_{\Delta 2} = 3.\frac{r_2^2.\sin 120°}{2} = 3.\frac{r_2^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r_2^2$$

dosadíme do objemu

$$V_{ZI} = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) = = \frac{v}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}.r_1^2 + \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4}.r_1^2.\frac{3\sqrt{3}}{4}.r_2^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.r_2^2\right) =$$

pod odmocninou vynásobíme iracionálne koeficienty – je to druhá mocnina koeficientu potom odmocníme výraz

$$= \frac{v}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}.r_1^2 + \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2.r_1^2.r_2^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.r_2^2\right) = \frac{v}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}.r_1^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.r_1.r_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.r_2^2\right) =$$

v zátvorke vyjmeme spoločný koeficient

$$= \frac{v}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{4}(r_1^2 + r_1.r_2 + r_2^2)$$

teraz už môžeme počítať pomer objemov

$$\frac{V_{ZI}}{V_{ZK}} = \frac{\frac{v}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{4}(r_1^2+r_1.r_2+r_2^2)}{\frac{\pi v}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)} = \frac{\frac{v}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi v}{3}} = \frac{v}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{4}.\frac{3}{\pi v} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}413\ 5$$

percentuálne 41,35 % objemu zrezaného kužeľa tvorí objem vpísaného zrezaného ihlana

100 % – 41,35 % = 58,65 %

objem zrezaného ihlana je o 58,65 % menší ako zrezaného kužeľa

---

Vypočítajte objem a povrch rotačného zrezaného kužeľa, ak je dĺžka priemeru dolnej podstavy 20 *cm*, priemeru hornej podstavy 14 *cm* a výšky telesa 4 *cm*.

Akú hmotnosť bude mať strojová súčiastka v tvare dutého zrezaného kužeľa s výškou 64 *mm*? Dolný priemery sú 6,4 *mm* a 4 *mm*, horné priemery sú 3,4 *mm* a 2,4 *mm*. Hustota použitého materiálu je 8 000 $\frac{kg}{m^3}$.

Akú výšku má teleso tvaru rotačného zrezaného kužeľa, ak sú polomery podstáv 4 *m* a 3 *m*, objem 465 m^3?

V akom pomere sú objemy pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana a zrezaného kužeľa vpísaného do ihlana?

Povrch rotačného zrezaného kužeľa S = 7 697 m^2, priemery podstáv sú 56 *m* a 42 *m*. Určte výšku kužeľa.